Sistemas de coordenadas en movimiento relativo

R. O. Barrachina

La principal tarea de un físico es encontrar aquellas leyes elementales universales a partir de las cuales puede construirse el cosmos por pura deducción. No hay un camino lógico para llegar a estas leyes; sólo pueden ser alcanzadas por la intuición, basada en una clara comprensión de la experiencia.
Albert Einstein: "Principios de la investigación", disertación ante la Sociedad Física de Berlín con motivo del 60mo. cumpleaños de Max Planck.

1. Sistemas de coordenadas acelerados

Para completar la descripción de los sistemas de coordenadas no inerciales, consideremos uno cuyo origen O' está ubicado en una posición $\mathbf{R}$ respecto del origen O de un sistema inercial. Supondremos que este vector posición depende del tiempo según una ley arbitraria $\mathbf{R} = \mathbf{R}_{\mathrm{O'O}}(t)$. Supondremos además que los ejes de coordenadas de ambos sistemas son paralelos; en caso contrario, la transformación de coordenadas que analizaremos ahora se agrega a la correspondiente a cualquier rotación (fija o dependiente del tiempo) del sistema de referencia no inercial.

Para analizar cómo se ve la segunda ley de Newton (válida en el sistema inercial) desde el sistema no inercial, necesitamos calcular la ley de transformación para la aceleración. Consideremos a tal fin una partícula de masa m sometida a una fuerza $\mathbf{F}$. Su posición está representada por un vector $\mathbf{r}_{\mathrm{O}}$ en el sistema inercial y otro vector $\mathbf{r}_{\mathrm{O'}}$ en el sistema no inercial. Ambos vectores posición están relacionados por la ecuación vectorial

$$\mathbf{r}_{\mathrm{O}} = \mathbf{r}_{\mathrm{O'}} + \mathbf{R}_{\mathrm{O'O}}(t) \; .$$

Derivando dos veces respecto del tiempo, obtenemos

$$\ddot{\mathbf{r}}_{\mathrm{O}} = \ddot{\mathbf{r}}_{\mathrm{O'}} + \ddot{\mathbf{R}}_{\mathrm{O'O}}(t) \; ,$$

y reemplazando en la segunda ecuación de Newton, suponiendo que la fuerza es externa y función solamente de la posición y del tiempo, resulta:

$$m\ddot{\mathbf{r}}_{\mathrm{O}'} = \mathbf{F} - m\,\ddot{\mathbf{R}}_{\mathrm{O}'\mathrm{O}}(t)\ .$$

Al igual que en el caso de las rotaciones, esta ecuación nos permite resolver un problema mecánico desde un sistema de referencia acelerado, en base a las ecuaciones de Newton, siempre que incorporemos una fuerza ficticia en la segunda ecuación de Newton,

$$m\ddot{\mathbf{r}}_{\mathrm{O}'} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{\text{aceleración}}\ ,$$

donde

$$\mathbf{F}_{\text{aceleración}} = -\,m\,\ddot{\mathbf{R}}_{\mathrm{O}'\mathrm{O}}(t)\ .$$

Para poder utilizar esta ecuación de Newton sin necesidad de hacer referencia al sistema inercial, debemos expresar la fuerza "$\mathbf{F}$" en las coordenadas del sistema no inercial. Si esta fuerza depende sólo de las distancias relativas entre partículas (y eventualmente del tiempo), su expresión funcional es *la misma* en ambos sistemas, ya que la distancia relativa no se modifica al cambiar de sistema de referencia. Si la fuerza depende de la velocidad, $\mathbf{F}$ en general cambia de manera no trivial, ya que la velocidad de una partícula no es la misma para ambos sistemas:

$$\dot{\mathbf{r}}_{\mathrm{O}} = \dot{\mathbf{r}}_{\mathrm{O}'} + \dot{\mathbf{R}}_{\mathrm{O}'\mathrm{O}}\ .$$

Tal dependencia en la velocidad aparece, por ejemplo, en el caso de fuerzas magnéticas, o con ciertas fuerzas viscosas.

2. Principio de Equivalencia

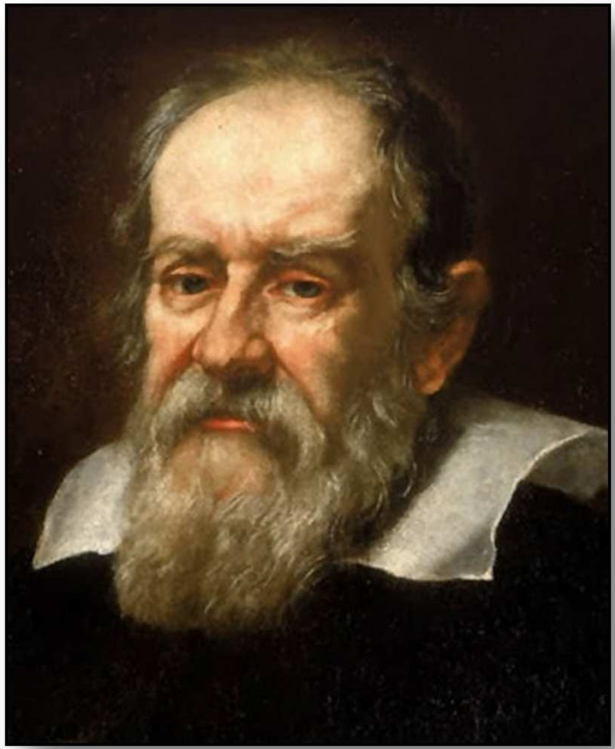
Un observador que insista en que su sistema de referencia es inercial, a pesar de la evidencia de que existe una fuerza $\mathbf{F}_{\text{aceleración}} = -\,m\,\ddot{\mathbf{R}}_{\mathrm{O}'\mathrm{O}}(t)$ aplicada sobre todo sistema, aún podría defender su postura si postula la existencia de un campo gravitatorio $\mathbf{g} = -\,\ddot{\mathbf{R}}_{\mathrm{O}'\mathrm{O}}(t)$. Esta idea representa lo que se conoce como "principio de equivalencia", estableciendo la semejanza entre aceleración y gravedad. En realidad, lo que se está planteando con este principio es algo bien extraño: que la masa que entra en la definición de la fuerza gravitatoria $m\mathbf{g}$, llamada masa gravitatoria, y la que entra en la segunda ecuación de Newton $\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}}$, llamada masa inercial, son iguales. Tal como se discute en otro apunte, la igualdad de estas dos masas ya era conocida por Galileo y Newton, pero no fue sino hasta el siglo XX cuando Albert Einstein vio en ella la clave de su teoría general de la relatividad. Entre muchas otras cosas, tal teoría postula que un campo gravitatorio es *localmente* equivalente a un sistema no inercial. Durante los últimos años del siglo XX hubo mucho interés en investigar la posible violación de esta igualdad. Un descubrimiento de tal tipo tendría un claro carácter revolucionario, ya que no sólo pondría en entredicho toda la teoría de Einstein, sino gran parte de la mecánica clásica de Newton. Actualmente, diferentes modelos teóricos postulan tal violación y establecen cotas experimentales para los parámetros que violan el principio de equivalencia, basándose en observaciones experimentales (fundamentalmente de la Cosmología).

3. Invariancia de Galileo

Vemos que si el origen del sistema O' no está acelerado respecto del sistema O, es decir si el movimiento *relativo* es "rectilíneo y uniforme", $\mathbf{R}_{\mathrm{O}'\mathrm{O}}(t) = \mathbf{b} + \mathbf{v}_{\mathrm{O}'\mathrm{O}}\ t$, entonces las ecuaciones de Newton son válidas en el sistema O'. Esta es ni más ni menos que una de las conclusiones que en otro apunte extraemos de la definición de sistema inercial: "Todo sistema de referencia que se mueve con velocidad constante respecto de un sistema inercial, es también inercial".

Si no hay una rotación involucrada en la transformación, siempre podemos redefinir los ejes cartesianos y el origen del tiempo t de manera que $\mathbf{b} = 0$, y tal que el movimiento relativo sea a lo largo de uno de los ejes; por ejemplo, $\mathbf{v}_{\mathrm{O}'\mathrm{O}} = v\,\hat{\mathbf{x}}$. En tal caso, la transformación entre ambos sistemas de coordenadas se escribe

$$\begin{bmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -v & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} .$$



Retrato original pintado por Justus Sustermans en 1636 de Galileo Galilei (Pisa, 15 de febrero de 1564 – Florencia, 8 de enero de 1642).

Esta transformación se denomina *Transformación de Galileo*. Vemos que el elemento de longitud es el mismo en ambos sistemas, $\mathrm{d}s^2 = \sum_j \mathrm{d}x_j^2 = \sum_j \mathrm{d}x_j'^2 = \mathrm{d}s'^2$. Además, tal como vimos, la forma de la ecuación de movimiento es la misma en ambos sistemas de referencia,

$$\mathbf{F} = m\,\ddot{\mathbf{r}} = m\,\ddot{\mathbf{r}}' = \mathbf{F}' .$$

Este hecho se suele enunciar diciendo que la segunda ecuación de Newton es *invariante* ante las transformaciones de Galileo. Cada término individual puede variar, pero todos transforman según el mismo esquema (v.g. son *covariantes*), manteniendo la forma de la ecuación. El hecho de que las leyes de Newton sean idénticas en ambos sistemas de referencia se denomina *Principio de relatividad newtoniana* ó *Invariancia de Galileo*.

Implícitamente, hemos supuesto que la fuerza no dependía de la velocidad. El hecho de que la interacción magnética quede fuera de esta conclusión no es una mera casualidad. El Electromagnetismo no resulta invariante ante transformaciones de Galileo, sino ante un tipo diferente de transformación, que discutiremos brevemente a continuación.

4. Transformación de Lorentz

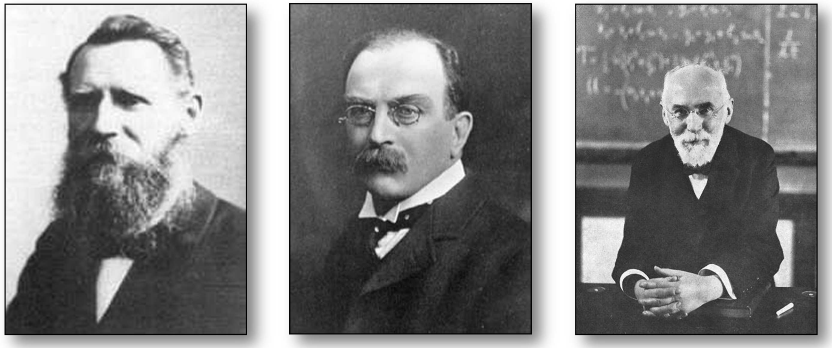
(para los que quieren aventurarse un poco más allá)

A comienzos del siglo XX la Física estaba transcurriendo un período que hoy denominaríamos de ciencia normal. Esto lo atestigua el gran éxito que se había logrado en la explicación de todos los fenómenos físicos conocidos hasta ese momento, desde la Mecánica Celeste hasta la Óptica y el Calor. Se tenía la percepción de que se vivía en un mundo ordenado donde todas las leyes de la Naturaleza eran conocidas, y sólo quedaba un trabajo de artesano para colocar en su lugar los ladrillos faltantes en el perfecto edificio de la ciencia. En la base de esta percepción estaba el concepto de que el Universo estaba formado por dos clases de elementos:

- La materia, que ocupa un lugar en el espacio y con la propiedad de que, cuando actúa sobre ella una influencia externa (es decir una fuerza), cambia su estado de movimiento.

- perturbaciones electromagnéticas, cuya velocidad de propagación es conocida.

El movimiento de la materia estaba descrito por las leyes de la Mecánica, formuladas en 1687 por Isaac Newton (1642-1727). En lo que concierne a las perturbaciones electromagnéticas, la teoría propuesta por James Clark Maxwell en 1865 constituía el segundo gran esquema teórico de la Física. Las cuatro ecuaciones de Maxwell permitían determinar los campos de fuerza (campos electromagnéticos) producido por distribuciones de cargas eléctricas y dipolos magnéticos. En 1888 Heinrich Hertz (1857 - 1894) había confirmado que la luz era también un fenómeno electromagnético, con lo cual la Óptica había pasado a ser una parte integral del Electromagnetismo. Además de estas dos teorías, la Termodinámica proveía las herramientas necesarias para comprender los fenómenos térmicos, aunque todavía faltaban unos pocos años para el descubrimiento por Walther Nernst (1865 - 1941) de la llamada tercera ley.

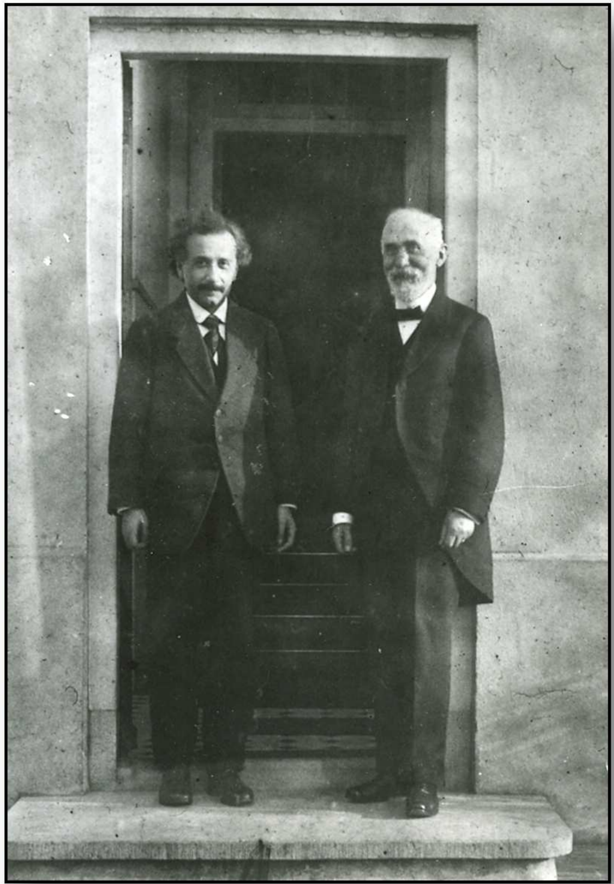


De izquierda a derecha: Woldemar Voigt (2 de setiembre de 1850 – 13 de diciembre de 1919) , Joseph Larmor (11 de julio de 1857 – 19 de mayo de 1942), y Hendrik Antoon Lorentz (18 de julio de 1853 – 4 de febrero de 1928).

Había confianza en que algunos nuevos fenómenos que habían sido descubiertos recientemente, como los rayos catódicos, X y Becquerel, eventualmente se clasificarían y comprenderían dentro de ese gran esquema. Parecía que todo lo importante sobre el comportamiento físico del universo se conocía ya, y la tarea del científico de esos años quedaba relegada a la resolución artesanal de algunos problemas, que habían ido quedando como hilos sueltos en el entramado de la Física.

Sin embargo algunos pocos científicos, muy pocos en realidad, habían comenzado a intuir un inconveniente en este esquema. El problema, o al menos uno de los problemas, era que las leyes de Maxwell no eran invariantes ante las transformaciones de Galileo. Aparentemente W. Voigt fue el primero en advertir este inconveniente, en un artículo[1] publicado en 1887 con el título *"Über das Doppler'sche Princip"* donde no sólo mostraba que las ecuaciones de Maxwell no eran invariantes ante una transformación de Galileo, sino que encontraba una transformación para la cual eran invariantes. Lamentablemente su descubrimiento no fue advertido por sus colegas. Esta transformación sería redescubierta en 1898 por Sir Joseph Larmor (1857 - 1942). Dos años más tarde presentaría esta idea en su libro "Éter y materia", al que Lamb llamaría en broma "Éter y no-materia". En 1899, también en forma independiente, Hendrik Anton Lorentz (1853-1928) escribiría esta transformación en un trabajo publicado en 1899. Es interesante aclarar que Voigt y Lorentz mantuvieron una copiosa correspondencia desde Marzo de 1883 en adelante, y que con los años llegaron a ser muy buenos amigos. Sin embargo, ni el artículo de Voigt de 1887 ni la transformación que hace invariante a las ecuaciones de Maxwell, son mencionadas en esta correspondencia. Recién en 1908 Voigt le envió una copia de su trabajo a Lorentz, quien en su libro "La Teoría de los electrones" agregó una nota al pie aclarando la preminencia de su amigo en el descubrimiento. Sin embargo, la transformación que vamos a describir en un momento, se denominan actualmente "Transformación de Lorentz".

En 1905, Albert Einstein estableció el marco conceptual adecuado para esta transformación. Muchas veces se ha sugerido que para construir su teoría de la Relatividad, Einstein se basó en resultados experimentales previos, muy especialmente los experimentos desarrollados por Michelson and Morley durante las últimas dos décadas del siglo XIX. Sin embargo no es así. Más bien se trata de un sustento conceptual basado en la belleza y la simplicidad.



Albert Einstein y Hendrik Antoon Lorentz en 1921[2].

Si volvemos a la relación entre las coordenadas de dos sistemas inerciales en movimiento relativo,

$$\begin{bmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \mathcal{A} \begin{bmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} .$$

parecería haber poco espacio para una transformación distinta a la de Galileo

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -v & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

En tren de dudar de todo, podemos proceder metódicamente y cuestionar primero la linealidad de esta transformación. Sin embargo, es posible dar varios argumentos de plausibilidad para esta suposición: por ejemplo, una transformación lineal garantiza la validez de la primera ley de Newton (que se mantiene en Relatividad). Recíprocamente, suponiendo homogeneidad espacial y temporal y la validez de la 1ra ley, puede deducirse la linealidad de la transformaciones (aunque no lo demostraremos aquí).

Suponiendo entonces que la transformación es lineal, veamos, en cambio, qué podemos argumentar respecto de los coeficientes de la matriz de tal transformación:

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} .$$

En primer lugar, parece muy razonable suponer que un evento que ocurre sobre el eje x en el sistema O, también ocurrirá en el mismo eje cuando se lo observa desde el sistema O'. En otras palabras, y' y z' deben ser -al menos- proporcionales a las coordenadas y y z, respectivamente, v.g. $y' = a_{22}y$ y $z' = a_{33}z$, con independencia de las otras coordenadas y el tiempo. Tenemos, entonces

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} .$$

Ahora, si realizamos una rotación de 180 grados de ambos sistemas de coordenadas alrededor de los ejes $\hat{\mathbf{z}}$ y $\hat{\mathbf{z}}'$, tendríamos que ver desde O lo que antes veíamos desde O'. Es decir que la misma matriz $\mathcal{A}$ tendría que caracterizar a la transformación inversa

$$\begin{bmatrix} t \\ -x \\ -y \\ z \end{bmatrix} = \mathcal{A} \begin{bmatrix} t' \\ -x' \\ -y' \\ z' \end{bmatrix} . \qquad (1)$$

Por lo tanto, $-y = a_{22}(-y') = a_{22}(-a_{22}y)$, por lo cual $a_{22} = \pm 1$. Pero como esta transformación también tiene que poder aplicarse al caso en que no hay movimiento relativo, debemos descartar la posibilidad $a_{22} = -1$. El mismo razonamiento puede emplearse para mostrar que $a_{33} = 1$. Tenemos entonces que

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Hasta ahora, basándonos en unos pocos argumentos plausibles, hemos recuperado la transformación de Galileo para las coordenadas transversales al movimiento relativo. Veamos ahora que podemos decir respecto de la coordenada x. En primer lugar, podemos plantear que un evento que ocurre en $x' = 0$, deberíamos verlo en el sistema O, como ocurriendo en $x = vt$. Es decir que

$$\begin{bmatrix} t' \\ 0 \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \mathcal{A} \begin{bmatrix} t \\ vt \\ y \\ z \end{bmatrix} .$$

O sea que

$$0 = a_{10}t + a_{11}vt + a_{12}y + a_{13}z .$$

Y para que esto ocurra, independientemente de y, z y t, es razonable suponer que $a_{12} = a_{13} = 0$ y $a_{10} = -a_{11}v$, o sea

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ -a_{11}v & a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Aplicando nuevamente la simetría (1), obtenemos

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}(x - vt) , \\ -x &= a_{11}(-x' - vt') . \end{aligned}$$

Eliminando x' de ambas ecuaciones, resulta la siguiente expresión para t',

$$t' = a_{11}\left(t + \frac{1 - a_{11}^2}{a_{11}^2}\,\frac{x}{v}\right) .$$

Tenemos entonces la siguiente transformación:

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & (1 - a_{11}^2)/a_{11}v & 0 & 0 \\ -a_{11}v & a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Sólo nos queda por determinar el factor a_{11}. Parece muy razonable asumir que la longitud debe permanecer invariante al pasar de un sistema inercial a otro. Si aplicamos esta condición estaríamos obligados a asumir que $a_{11} = 1$, recuperando así la transformación de Galileo. Pero sabemos que esta transformación no deja invariante a las ecuaciones del electromagnetismo. Y es aquí donde Einstein plantea un principio adicional. En sus propias palabras, "toda [su] teoría se basa en dos postulados"

1. Las leyes de la Física tienen la misma forma en todos los sistemas inerciales.

2. En todos los sistemas inerciales, la velocidad de la luz c es la misma ya sea que la luz es emitida por un cuerpo en reposo o por un cuerpo en movimiento uniforme.

Este último es uno de los principales resultados que se derivan de las ecuaciones de Maxwell. Aplicando la transformación $\mathcal{A}$ a un frente de luz que se mueve en la dirección $\hat{\mathbf{x}}$, obtenemos que

$$\begin{bmatrix} t' \\ ct' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \mathcal{A} \begin{bmatrix} t \\ ct \\ y \\ z \end{bmatrix} .$$

O sea

$$\begin{aligned} t' &= a_{11}\left(t + \frac{1-a_{11}^2}{a_{11}^2}\,\frac{ct}{v}\right) \\ ct' &= a_{11}(ct - vt) , \end{aligned}$$

de donde obtenemos que

$$a_{11} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} .$$

Resulta así la transformación de Lorentz, caracterizada por la matriz

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma v/c^2 & 0 & 0 \\ -\gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

con

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} .$$

Este resultado básico de la *teoría "Restringida" o "Especial" de la Relatividad* da lugar a un gran número de efectos no intuitivos que han sido verificados experimentalmente, como la contracción FitzGerald-Lorentz de las longitudes ó la dilatación temporal.

Vemos que en el límite $v \ll c$ se recupera la transformación de Galileo, estableciendo un límite para la validez de la Mecánica Clásica que estamos desarrollando en esta serie de apuntes.

Notas

[1]Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 41 (1887)

[2]Fuente: Museo Boerhaave, (www.museumboerhaave.nl).